TAMPEREEN YLIOPISTO
Luonnontieteiden Pro gradu -tutkielma

Ilkka Niemi-Nikkola

# Differentiaaliyhtälösysteemit sekä niiden tasapainopisteiden stabiilisuus

Luonnontieteiden tiedekunta
Matematiikka
Tammikuu 2017

Tampereen yliopisto

Luonnontieteiden tiedekunta

Niemi-Nikkola, Ilkka: Differentiaaliyhtälösysteemit sekä niiden tasapainopisteiden stabiilisuus

Pro gradu -tutkielma, 37 s.

Matematiikka

Tammikuu 2017

---


## Tiivistelmä

Tutkielmassa käsitellään differentiaaliyhtälösysteemejä. Tutkielmassa perehdytään tutkimaan lineaarista differentiaaliyhtälösysteemiä. Ensin määritellään systeemin ominaisarvot ja ominaisvektorit. Tämän jälkeen siirrytään määrittelemään systeemin tasapainopisteet. Tutkielmassa käsitellään vain eristettyjä tasapainopisteitä. Lineaarisella systeemillä on vain yksi eristetty tasapainopiste. Tämä tasapainopiste on origossa. Epälineaarisella systeemillä voi olla eristettyjä tasapainopisteitä nollasta äärettömään. Tasapainopiste voidaan luokitella sen perusteella miten systeemin ratkaisut käyttäytyvät sen läheisyydessä. Systeemin tasapainopisteet määritellään kolmeen eri luokkaan. Luokat ovat stabiili, epästabiili sekä asymptoottisesti stabiili. Tutkielman lopuksi keskitytään tarkastelemaan tietyt ehdot täyttäviä epälineaarisia differentiaaliyhtälösysteemeitä. Näiden systeemien analyyttisen ratkaisun löytyminen ei ole taattua mutta käyttäen hyväksi systeemin tasapainopisteitä ja linearisointia voidaan saada tietoa ratkaisuiden käyttäytymisestä tasapainopisteen läheisyydessä ratkaisematta systeemiä.

# Sisältö

# 1 Johdanto

Differentiaaliyhtälö on yhtälö jonka yleinen muoto on

$$f(t, x, x', x'', \dots x^{(n)}) = 0.$$

Tutkielmassa tarkastellaan usean yhtälön muodostamia systeemeitä. Tutkielman tavoitteena on selvittää tietyt ehdot täyttävien epälineaaristen differentiaaliyhtälösysteemien tasapainopisteiden stabiilius. Yleensä epälineaarisille differentiaaliyhtälösysteemeille ei ole olemassa analyyttisiä ratkaisuja. Kuitenkin systeemistä itsestään on mahdollista löytää tietoa ratkaisuista tarkastelemalla systeemin tasapainopisteiden laatua. Aluksi tullaan määrittelemään differentiaaliyhtälösysteemi. Tämän jälkeen tarkastellaan vakiokertoimisen lineaarisen differentiaaliyhtälösysteemin ominaisarvoja. Näiden avulla voidaan määrittää lineaarisen differentiaaliyhtälösysteemin origon stabiilius. Tämän jälkeen siirrytään tarkastelemaan lineaarisen systeemin tasapainopisteen, origon, ominaisuuksia, jonka jälkeen siirrytään epälineaarisen systeemin tarkasteluun. Lukijan oletetaan hallitsevan sekä differentiaaliyhtälöiden perusteet, että lineaarialgebran perusteet.

# 2 Differentiaaliyhtälösysteemi

Jatkossa viitataan differentiaaliyhtälösysteemiin lyhemmillä termeillä systeemi tai yhtälöt. Luvussa määritellään ensimmäisen asteen differentiaaliyhtälösysteemi, esitettään lause joka takaa ratkaisun olemassaolon sekä sen erityistapaus lineaarinen systeemi sekä jälkimmäisen ratkaisu käyttäen matriisin eksponenttifunktioita.

## 2.1 Differentiaaliyhtälösysteemi

Jatkossa tarkastellaan differentiaaliyhtälöitä, jotka ovat ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöitä, ellei toisin mainita. Systeemit muodostuvat yhtälöistä $x'(t) = f(x, t)$. Differentiaaliyhtälösysteemi koostuu $n$-määrästä differentiaaliyhtälöitä ja systeemiin yleinen muoto on

$$\begin{cases} f_1(x_1', x_1, x_2, ..., x_n, t) = 0 \\ f_2(x_2', x_1, x_2, ..., x_n, t) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_n', x_1, x_2, ..., x_n, t) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

joissa $f_i, i = 1, 2, ...., n$ ovat funktioita. Systeemi ratkaistaan etsimällä differentioituvat funktiot $x_1(t), x_2(t), ...x_n(t)$, siten, että ne toteuttavat systeemin 2.1 kaikilla $t \in I$ missä $I \subseteq \mathbb{R}$ on reaaliakselin väli.

**Esimerkki 2.1.** Esimerkiksi differentiaaliyhtälöt

$$\begin{cases} x_1' - 2tx_1 - 3t^4x_2 + \sin(t)x_3 = 0 \\ x_2' - 4x_1 + 3x_3 - \sin(t) = 0 \\ x_3' - 14x_2 + tx_3 + e^t = 0 \end{cases}$$

muodostavat differentiaaliyhtälösysteemin.

**Määritelmä 2.1.** Systeemille voidaan asettaa *alkuehto*. Systeemin alkuehto on lisäehto

$$\bar{x}(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

joka ratkaisun $\bar{x}(t)$ täytyy toteuttaa. Arvot $x_1^*, \ldots, x_n^*$ ovat vakioita [2, s.313].

## 2.2 Lineaarinen Differentiaaliyhtälösysteemi

Esitellään nyt lineaarinen differentiaaliyhtälösysteemi.

**Määritelmä 2.2.** Lineaarinen systeemi on muotoa

$$\begin{aligned} x'(t)_1 &= a(t)_{11}x_1 + a(t)_{12}x_2 + ... + a(t)_{1n}x_n + f_1(t) \\ x'(t)_2 &= a(t)_{21}x_1 + a(t)_{22}x_2 + ... + a(t)_{2n}x_n + f_2(t) \\ &\cdots \\ x'(t)_n &= a(t)_{n1}x_1 + a(t)_{n2}x_2 + ... + a(t)_{nn}x_n + f_n(t), \quad 1 \le i \le n. \end{aligned}$$

Lisäksi, jos vähintään yksi funktioista $f_i(t)$ eroaa nollasta, niin tätä systeemiä kutsutaan *epähomogeeniseksi ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälösysteemiksi*. Jos kaikki funktiot $f_i(t) = 0$, niin systeemi on *homogeeninen*.

Differentiaaliyhtälö on *epälineaarinen*, jos yhtälöä ei voida esittää määritelmän 2.2 esittämällä tavalla. Esimerkiksi $x' = ax - b\sqrt{x} + f(t)$ on epälineaarinen differentiaaliyhtälö koska yhtälössä on termi $b\sqrt{x}$ .

**Huomautus 2.1.** Vektorifunktion derivointi ja integrointi toteutetaan termeittäin siten, että

$$\bar{x}'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} \qquad \int_{t_0}^{t} \bar{x}(t) = \begin{pmatrix} \int_{t_0}^t x_1'(t) \\ \int_{t_0}^t x_2'(t) \\ \int_{t_0}^t x_3'(t) \\ \vdots \\ \int_{t_0}^t x_n'(t) \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Vastaavasti voidaan derivoida tai integroida matriisifunktioita [2, s.310-311].

**Määritelmä 2.3.** Määritelmän 2.2 systeemi voidaan esittää vektorimuodossa

$$\bar{x}' = A(t)\bar{x} + \bar{f}(t), \tag{2.4}$$

missä $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Yhtälön (2.4) vektoreiden matriisimuodot ovat
(2.5)

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \bar{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \\ \cdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

Homogeeninen systeemi voidaan kirjoittaa muotoon

$$\bar{x}' = A(t)\bar{x}, \quad \text{kun} \quad \bar{f}(t) = \bar{0} \tag{2.6}$$

**Määritelmä 2.4.** Vektorifunktiota $\bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), ...x_n(t))$, joka toteuttaa systeemin (2.4) kaikilla $t \in I$ kutsutaan systeemin (2.4) *ratkaisuksi*.

**Esimerkki 2.2.** Tarkastellaan systeemiä

$$\begin{cases} x' = 2x + y + 3e^{2t} \\ y' = -4x + 2y + te^{2t}. \end{cases}$$

Tämän systeemin voi kirjoittaa yhtälön (2.4) muotoon

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ te^{2t} \end{pmatrix}.$$

## 2.3 Lineaarisen differentiaaliyhtälösysteemin ratkaisemisesta ja matriisiekspotentiaali

Esitetään lineaarisen differentiaaliyhtälösysteeminen ratkaisu käyttäen hyväksi matriisin eksponenttifunktioita, kun $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Lisäksi ratkaistaan alkuarvo-ongelmatehtävä käyttäen matriisin eksponenttifunktiota.

## 2.4 Perusratkaisumatriisi

Määritellään ensin perusratkaisumatriisi homogeeniselle systeemille

$$\bar{x}' = A(t)\bar{x}. \tag{2.7}$$

Tässä $\bar{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ ja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

**Määritelmä 2.5.** Olkoon $\bar{\phi}_1(t), \bar{\phi}_2(t), \ldots, \bar{\phi}_m(t)$ ratkaisuja systeemille 2.7. Näiden ratkaisujen sanotaan olevan *lineaarisesti riippumattomia*välillä $I$ kun

$$c_1\bar{\phi}_1(t) + c_2\bar{\phi}_2(t) + \cdots + c_m\bar{\phi}_m(t) = \bar{0}$$

toteutuu vain kun $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0, \forall t \in I$. Systeemi 2.7 vastaa $n$-asteen differentiaaliyhtälöä, joten on johdonmukaista etsiä $n$ määrää lineaarisesti riippumattomia ratkaisuja systeemiin. Joukkoa, jossa on $n$ määrä lineaarisesti riippumattomia ratkaisuja systeemiin 2.7, sanotaan *perusratkaisujoukoksi.*

**Määritelmä 2.6.** Olkoon $\bar{\phi}_1(t), \bar{\phi}_2(t), \ldots, \bar{\phi}_n(t) \in \mathbb{R}^n$ ratkaisuja systeemiin2.7. Olkoon $\Phi(t)$ matriisi jonka sarakkeet ovat vektorit $\bar{\phi}_1(t), \bar{\phi}_2(t), \ldots, \bar{\phi}_n(t)$. Joten

$$\Phi(t) = (\bar{\phi}_1(t), \ldots, \bar{\phi}_n(t)) = \begin{pmatrix} \phi_{11}(t) & \ldots & \phi_{1n}(t) \\ \phi_{21}(t) & \ldots & \phi_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{n1}(t) & \ldots & \phi_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

on systeemin

$$\bar{x}' = A(t)\bar{x}$$

*perusratkaisumatriisi*, kun vekorit $\bar{\phi}_i$ ovat lineaarisesti riippumattomia ja $\Phi(t_0) = I$ [2, s.318].

## 2.5 Matriisin eksponenttifunktio

**Määritelmä 2.7.** Eksponenttifunktio $e^{rt}$ voidaan määritellä potenssisarjana kuten [2, s.180]

$$e^{rt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(rt)^n}{n!} = 1 + rt + \frac{(rt)^2}{2!} + \frac{(rt)^3}{3!} + \ldots \tag{2.8}$$

Määritellään matriisin eksponenttifunktio.

**Määritelmä 2.8.** Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Tällöin *matriisin eksponenttifunktio* $e^{At}$ määritellään siten, että

$$e^{At} = I + At + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^k. \tag{2.9}$$

Huomataan, että yhtälön ratkaisu tulee myös olemaan $n \times n$ matriisi, jos sarja suppenee[2, s.348].

**Lause 2.1.** *Potenssisarja*

$$e^{At} = I + At + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^k. \tag{2.10}$$

*suppenee kaikilla* $t \in \mathbb{R}$*. Lisäksi sarja voidaan derivoida termeittäin ja se on perusratkaisumatriisi systeemille*

$$\bar{x}' = A\bar{x}.$$

*Oletetaan lisäksi, että jos* $\Phi(t) = e^{At}$*, niin* $\Phi(0) = e^{A0} = I$ *ja jos* $\Phi(t) = e^{A(t-t_0)}$ *niin* $\Phi(t_0) = e^{A(t_0-t_0)} = e^{A0} = I$*. [2, s.349].*

*Todistus.* Kts.[2, s. 349-350]. □

**Lause 2.2.** *Jos* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *on vakioarvoinen matriisi, niin tällöin ratkaisu alkuarvo-ongelmaan*

$$\bar{x}'(t) = A\bar{x}(t), \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$$

*on* $\bar{x}(t) = e^{At}\bar{x}_0$ *ja tämä ratkaisu on yksikäsitteinen [1, s.351].*

**Esimerkki 2.3.** Käytetään nyt ratkaistua $e^{At}$ alkuarvo-ongelman

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \bar{x}, \quad \bar{x}(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ratkaisuun. Nyt

$$\begin{aligned} \bar{x}'(t) &= A\bar{x}(t) \quad \text{ja} \\ A^n &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Määritelmän 2.8 perusteella

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{pmatrix} 1 + 2t + \cdots + \frac{(2t)^n}{n!} + \ldots & 0 \\ 0 & 1 + 5t + \cdots + \frac{(5t)^n}{n!} + \ldots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Lauseen 2.2 perusteella ratkaisu alkuarvo-ongelmaan on

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= e^{At}\bar{x}(t_0), \quad \text{siis ratkaisu on} \\ \bar{x}(t) &= \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{5t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## 2.6 Korkeamman asteen lineaarinen differentiaaliyhtälö

Tarkastellaan $n$ asteen normaalimuotoista differentiaaliyhtälöä

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}). \tag{2.11}$$

Määritellään $y_1, y_2, \ldots, y_n$ siten, että

$$y_1 = x, \quad y_2 = x', \quad y_3 = x'', \quad \ldots, \quad y_n = x^{(n-1)}. \tag{2.12}$$

Huomataan, että $y_1' = x' = y_2, y_2' = x'' = y_3$ ja niin edellen. Sijoitetaan nyt (2.12) yhtälöön (2.11) ja saadaan $n$ kappaleesta koostuva systeemi

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(t, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{cases} \tag{2.13}$$

missä jokainen yhtälö on ensimäisen asteen differentiaaliyhtälö. Huomataan, että $x(t)$ on ratkaisu yhtälöön (2.11) jos $y_1, y_2, \ldots y_n$ jotka on määritelty yhtälössä ja (2.12) toteuttavat systeemin (2.13)[1, s.245].
Tarkastellaan tätä menetelmää esimerkin avulla.

**Esimerkki 2.4.** Tarkastellaan toisen asteen differentiaaliyhtälöä

$$2x'' + 4x' + 5x = 0.$$

$$x'' = -2x' - \frac{5x}{2}$$

Suoritetaan muuttujan vaihto vaihtaen

$$x = y_1, \quad x' = y_2 \quad \text{ja} \quad x'' = y_3$$

nyt

$$y_1' = x' = y_2$$

$$y_2' = x'' = y_3 = -2x' - \frac{5x}{2} = 2y_2 - \frac{5y_1}{2}.$$

Esitetään annettu toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö ensimmäisenkertaluvun differentiaaliyhtälösysteeminä

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -\dfrac{5y_1}{2} + 2y_2. \end{cases}$$

**Määritelmä 2.9.** Määritellään vektorin $\bar{x}(t) \in \mathbb{R}^m$ *normi* siten, että

$$|\bar{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2}. \tag{2.14}$$

**Määritelmä 2.10.** Olkoon $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Tällöin funktio $\bar{f}(\bar{x}, t)$ on *Lipschitz jatkuva* alueessa $\Omega$ vektorimuuttujan $\bar{x}$ suhteen, kun on olemassa $k > 0$ siten, että

$$\left|\bar{f}(\bar{x}_1, t) - \bar{f}(\bar{x}_2, t)\right| \leq k \left|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right|, \tag{2.15}$$

jos $(\bar{x}_1, t)$ ja $(\bar{x}_2, t)$ ovat pisteitä alueessaa $\Omega$ [1, s.718].

**Lause 2.3.** *Olkoon $\bar{f} : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^m$ ja olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ alue. Oletetaan, että $\bar{f}(\bar{x}, t)$ toteutaa Lipschitz jatkuvuuden ehdon. Tällöin alkuarvotehtävälle*

$$\bar{x}' = \bar{f}(\bar{x}, t), \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}^* \in \Omega$$

*on olemassa yksikäsitteinen ja jatkuva ratkaisuvektori $\bar{x}(t)$ välillä $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ missä $\delta > 0$ [2, s.433].*

# 3 Ominaisarvot ja ominaisvektorit

Ominaisarvojen avuilla voidaan löytää yleinen ratkaisu lineaariseen kaksiulotteiseen differentiaaliyhtälösysteemiin yksinkertaisesti. Matriisin ominaisarvojen avulla pystytään määrittämään lineaarisen systeemin tasapainopisteiden stabiilius. Eri ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit ovat lineaarisesti riippumattomia.

**Määritelmä 3.1.** Jotta $\lambda$ on vakioarvoisen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *ominaisarvo*, niin silloin täytyy löytyä *ominaisvektori* $\bar{v} \neq 0$ siten, että

$$A\bar{v} = \lambda\bar{v} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0} \tag{3.1}$$

**Esimerkki 3.1.** Olkoon $A = I$ ja $I$ on identiteettimatriisi. Nyt mille tahansa $\bar{v}$ pätee, että

$$A\bar{v} = I\bar{v} = \bar{v} \tag{3.2}$$

Näin ollen huomataan, että $\lambda = 1$ on matriisin $A$ ainoa ominaisarvo ja näin ollen jokainen vektori $\bar{v}$ on identiteettimatriisin $I$ ominaisvektori.
Olkoon $\lambda$ matriisin $A$ ominaisarvo. Tällöin

$$A\bar{v} = \lambda\bar{v} = \lambda I\bar{v} \quad \text{ja} \quad (A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}. \tag{3.3}$$

Yhtälöllä

$$(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0} \tag{3.4}$$

on nollasta eroava ratkaisu $\bar{v}$ kun

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{3.5}$$

**Lause 3.1.** *Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriisi. Tällöin $\lambda$ on matriisin $A$ ominaisarvo jos ja vain jos [2, s.330]*

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{3.6}$$

**Määritelmä 3.2.** Yhtälöä (3.6) sanotaan matriisin $A$ *karakteristiseksi yhtälöksi* ja $p(\lambda)$ on matriisin $A$ *karakteristinen polynomi*[2, s.330].

**Määritelmä 3.3.** Algebran peruslauseen perusteella yhtälöllä (3.6) on korkeintaan sen karakteristisen polynomin asteen $n$ verran ratkaisuja. Kun ratkaisu $\lambda$ toistuu $r$ kertaa, niin tällöin ratkaisulla $\lambda$ on *algebrallinen kertaluku* $r$. Ominaisarvon $\lambda$ *geometrinen kertaluku* $k$ on se lineaarisesti riippumattomien ominaisvektorien lukumäärä, joihin ominaisarvo $\lambda$ liittyy.

**Huomautus 3.1.** Tarkastellaan $2 \times 2$ neliömatriisia $A$. Tällöin

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

**Esimerkki 3.2.** Tarkastellaan matriisia

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

ja lasketaan sen ominaisarvot. Nyt lauseesta 3.1 seuraa, että $\lambda$ on matriisin (3.8) ominaisarvo jos ja vain jos se toteuttaa yhtälön

$$\det\left(\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} - \lambda I\right) = 0.$$

Ratkaistaan yhtälö

$$\lambda^2 + \lambda - 12 = 0.$$

Matriisin (3.8) ominaisarvoiksi saadaan $\lambda_1 = -4$ ja $\lambda_2 = 3$.

## 3.1 Ominaisvektorit ja ominaisavaruudet

**Lause 3.2.** *Olkoon $\lambda$ matriisin $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ominaisarvo ja olkoon*

$$E_\lambda = \{\bar{v} : A\bar{v} = \lambda\bar{v}\}. \tag{3.9}$$

*Tällöin $E_\lambda$ on $\mathbb{C}^n$ aliavaruus.*

*Todistus.* Vrt. [2, s.332]. Olkoon $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in E_\lambda$. Nyt

$$A(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = A\bar{v}_1 + A\bar{v}_2.$$

Määritelmän 3.1 perusteella

$$A\bar{v}_1 + A\bar{v}_2 = \lambda\bar{v}_1 + \lambda\bar{v}_2 = \lambda(\bar{v}_1 + \bar{v}_2).$$

Joten $\bar{v}_1 + \bar{v}_2 \in E_\lambda$.
Oletetaan nyt, että $k \neq 0$. Nyt

$$A(k\bar{v}_1) = kA\bar{v}_1 = k\lambda\bar{v}_1 = \lambda(k\bar{v}_1),$$

joten $k\bar{v}_1 \in E_\lambda$. Nyt aliavaruuskriteerit ovat täytetty joten $E_\lambda$ on $\mathbb{C}^n$ aliavaruus. □

**Määritelmä 3.4.** Olkoon $\lambda$ matriisin $A$ ominaisarvo. Tällöin aliavaruus $E_\lambda$ on matriisin $A$ ominaisarvoa $\lambda$ vastaava *ominaisavaruus*.

**Lause 3.3.** *Olkoon $A$ vakiokertoiminen neliömatriisi ja olkoon $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ toisistaan eroavat matriisin $A$ ominaisarvot joita vastaavat ominaisvektorit $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots \bar{v}_n$. Tällöin ominaisvektorit $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots \bar{v}_n$ ovat lineaarisesti riippumattomia. Ominaisvektorit jotka vastaavat eri ominaisarvoja ovat lineaarisesti riippumattomia.*

*Todistus.* Kts.[2, s.332-333]. □

**Huomautus 3.2.** Neliömatriisilla $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on $n$ määrä lineaarisesti riippumattomia ominaisvektoreita, jos kaikkien matriisin $A$ ominaisarvojen algebrallinen kertaluku on yksi. Kuitenkaan matriisilla $A$ ei välttämättä ole $n$ määrää lineaarisesti riippumattomia ominaisvektoreita, kun sen ominaisarvon algebrallinen kertaluku on isompi kuin yksi [2, s.338].

**Esimerkki 3.3.** Etsitään nyt matriisille

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

ominaisarvot ja ominaisvektorit. Ratkaistaan ominaisarvot yhtälöstä (3.6) ja saadaan matriisin $A$ ominaisarvoiksi $\lambda_1 = i$ ja $\lambda_2 = -i$. Ratkaistaan ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit

$$(A - \lambda_i I)\bar{v} = \bar{0}.$$

Ratkaistaan nyt ominaisarvoa $\lambda_1$ vastaava ominaisvektori

$$\begin{pmatrix} 2-i & -1 \\ 5 & -3-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tästä saadaan $(2-i)x_1 - x_2 = 0$ ja $5x_1 + (-3-i)x_2 = 0$ Nyt $x_2 = (2-i)x_1$ joten ominaisarvoa $\lambda_1$ vastaava ominaisvektori ja ominaisavaruus on

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad E_i = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} \right\}.$$

Vastaavasti ratkaistaan ominaisarvoa $\lambda_2$ vastaava ominaisvektori

$$\begin{pmatrix} 2+i & -1 \\ 5 & -3+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Yhtälöstä $(2+i)x_1 - x_2 = 0$ saadaan muodostettua ominaisvektori ja ominaisavaruus

$$\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad E_{-i} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix} \right\}.$$

## 3.2 Ominaisarvot ja lineaarisen differentiaaliyhtälösysteemin ratkaisu

Ominaisarvojen avulla voidaan muodostaa systeemin

$$\bar{x}' = A\bar{x} \tag{3.11}$$

yleinen ratkaisu, kun $A$ on vakiokertoiminen.

**Lause 3.4.** *Olkoon matriisi $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vakioarvoinen matriisi. Oletetaan, että matriisilla on $n$ määrä lineaarisesti riippumattomia ominaisvektoreita $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots \bar{v}_n$ joita vastaavat ominaisarvot $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$. Ominaisarvojen algebrallisen kertaluvun ei tarvitse olla yksi. Tällöin on olemassa joukko systeemin* (3.11) *ratkaisuvektoreita*

$$\bar{x}_1(t) = \bar{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \bar{x}_2(t) = \bar{v}_2 e^{\lambda_2 t}, \ldots, \bar{x}_n(t) = \bar{v}_n e^{\lambda_n t}, \tag{3.12}$$

*jotka muodostavat perusratkaisumatriisin $\Phi(t)$ systeemille* (3.11).

*Todistus.* Vrt. [2, s.338-339]. Osoitetaan ensin, että $\bar{x}_i(t), 1 \le i \le n$ on ratkaisu systeemille (3.11). Nyt

$$\begin{aligned} \bar{x}'(t) &= (\bar{v}_i e^{\lambda_i t})' \\ &= \lambda_i \bar{v}_i e^{\lambda_i t} \quad \text{(määritelmä 3.1)} \\ &= A\bar{v}_i e^{\lambda_i t} \\ &= A\bar{x}_i(t). \end{aligned}$$

Ratkaisut $\bar{x}_i$ muodostavat perusratkaisumatriisin, koska ominaisvektorit $\bar{v}_i$ ovat lineaarisesti riippumattomia. □

**Huomautus 3.3.** Tarkastellaan nyt tilannetta jossa matriisin $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ominaisarvot ovat samat eli $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ja olkoon $\bar{v}_1$ tätä ominaisarvoa vastaava ominaisvektori. Nyt yksi ratkaisu on

$$\bar{x}_1(t) = \bar{v}_1 e^{\lambda t}.$$

Toinen ratkaisu on muotoa

$$\bar{x}_2(t) = (\bar{v}_1 t + \bar{v}_2)e^{\lambda t} = \bar{v}_1 t e^{\lambda t} + \bar{v}_2 e^{\lambda t} \tag{3.13}$$

ja tässä $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$ ovat nollasta eroavia vakiovektoreita [1, s.331]. Sijoitetaan nyt $\bar{x} = \bar{v}_1 t e^{\lambda t} + \bar{v}_2 e^{\lambda t}$ yhtälöön $\bar{x}' = A\bar{x}$ ja saadaan yhtälö

$$\bar{v}_1 e^{\lambda t} + \lambda \bar{v}_1 t e^{\lambda t} + \lambda \bar{v}_2 e^{\lambda t} = A\bar{v}_1 t e^{\lambda t} + A\bar{v}_2 e^{\lambda t}. \tag{3.14}$$

Yhtälöstä (3.14) saadaan johdettua yhtälöt

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)\bar{v}_1 &= \bar{0} \\ (A - \lambda I)\bar{v}_2 &= \bar{v}_1 \end{aligned} \tag{3.15}$$

asettamalla kertoimia $te^{\lambda t}$ ja $e^{\lambda t}$ sisältävät termit yhtä suuriksi. Vektoreiden $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$ on toteutettava yhtälöt (3.15), jotta yhtälö (3.13) olisi ratkaisu yhtälöön $\bar{x}' = A\bar{x}$.

# 4 Stabiilisuus

Kappaleessa perehdytään kahden autonomisen differentiaaliyhtälön systeemin tasapainopisteen stabiiliuden tutkimiseen. Ensin määritellään autonominen systeemi. Tämän jälkeen siirrytään määrittelemään tasapainopisteet. Tarkastellaan lineaarisen systeemin tasapainopistettä. Määritellään tasapainopisteiden stabiilius sekä tarkastellaan lineaarisen systeemin ominaisarvoja ja lineaarisen systeemin tasapainopisteen stabiiliutta.

**Huomautus 4.1.** Jatkossa käsitellään systeemeitä

$$\begin{cases} f(x', y', x, y, t) = 0 \\ g(x', y', x, y, t) = 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Systeemin ratkaisu on vektorifunktio $\bar{x}(t) = (x(t), y(t))$, joka on derivoituva ja toteuttaa yhtälön välillä $I$.

## 4.1 Autonominen systeemi

Määritellään autonominen systeemi.

**Määritelmä 4.1.** Normaalimuotoista differentiaaliyhtälösysteemiä sanotaan *autonomiseksi* silloin, kun muuttujaa $t$ ei esiinny eksplisiittisesti systeemissä. Näin ollen autonominen differentiaaliyhtälösysteemi on

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y). \end{cases} \tag{4.2}$$

Jos systeemi ei ole esitettävissä näin, niin systeemi ei ole autonominen [2, s.377].

**Esimerkki 4.1.** Autonominen systeemi on esimerkiksi systeemi

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) \\ y'(t) = x^2(t) + y(t). \end{cases}$$

Vastaavasti systeemi ei ole autonominen, jos systeemi on esimerkiksi muotoa

$$\begin{cases} x'(t) = tx(t)y(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t)t. \end{cases}$$

## 4.2 Tasapainopisteet

Differentiaaliyhtälön $y' = f(x)$ pistettä $x_0$ sanotaan tasapainopisteeksi, kun piste $x_0$ täyttää ehdon $f(x_0) = 0$. Myös differentiaaliyhtälösysteemistä voi löytyä tasapainopisteitä. Jotta löydettäisiin autonomisen differentiaaliyhtälösysteemin tasapainopisteet, niin on ratkaistava systeemi

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

**Määritelmä 4.2.** Systeemin (4.3) ratkaisuja sanotaan systeemin (4.2) *tasapainopisteiksi.* Systeemillä 4.2 voi olla tasapainopisteitä nollasta äärettömään.

**Huomautus 4.2.** Huomataan yhtälöstä (4.2) ja yhtälön(4.3) ratkaisusta, että

$$\begin{cases} x'(t) = 0 = f(x_0, y_0) \\ y'(t) = 0 = g(x_0, y_0) \end{cases}$$

funktioiden $x(t)$ ja $y(t)$ on oltava vakioratkaisuja systeemiin (4.2). Tästä seuraa, että systeemin (4.2) ratkaisun päädyttyä tasapainopisteeseen, niin ratkaisu tulee pysymään tässä pisteessä, koska funktioiden $x(t)$ ja $y(t)$ derivaatat ovat nolla tässä pisteessä [2, s. 382] .

**Määritelmä 4.3.** Tässä tutkielmassa tarkastellaan vain *eristettyjä tasapainopisteitä.* Eristetyllä tasapainopisteellä $(x_0, y_0)$ on olemassa ympäristö, jossa ei ole muita tasapainopisteitä [3, s.378].

**Esimerkki 4.2.** Tarkastellaan systeemiä

$$\begin{cases} x' = -2x^2 + y \\ y' = x - 2y^2. \end{cases}$$

Etsitään nyt tämän systeemin tasapainopisteet asettamalla

$$\begin{cases} 2x^2 + y = 0 \\ x - 2y^2 = 0. \end{cases}$$

Tämän yhtälösysteemin ratkaisut ovat

$$(0,0) \quad \text{ja} \quad \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Määritelmän 4.2 perusteella nämä pisteet ovat tarkasteltavan systeemin tasapainopisteitä.

**Esimerkki 4.3.** Tarkastellaan vielä systeemiä

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -3\sin(x). \end{cases}$$

Etsitään systeemin tasapainopisteet asettamalla

$$\begin{cases} y = 0 \\ -3\sin(x) = 0. \end{cases}$$

Nyt $-3\sin(x)$ on nolla, kun $\sin(x)$ on nolla eli, kun $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Nyt käsiteltävällä systeemillä on siis äärettömän monta tasapainopistettä määritelmän 4.2 perusteella. Tasapainopisteet ovat muotoa $(\pi n, 0), n \in \mathbb{Z}$.

## 4.3 Lineaarisen systeemin tasapainopiste

Tarkastellaan kaksiulotteista autonomista homogeenista vakiokertoimista lineaarista systeemiä

$$\bar{x}' = A\bar{x}. \tag{4.4}$$

Tällä yhtälöllä on yksi eristetty tasapainopiste

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{jos } \det(A) \neq 0. \tag{4.5}$$

Tasapainopiste on origo, $(x, y) = (0, 0)$[4, s.30].

**Huomautus 4.3.** Jos $det(A) = 0$, niin tällöin systeemillä on ääretön määrä tasapainopisteitä[4, s.30].

## 4.4 Systeemin tasapainopisteiden stabiilius

Kappaleessa esitetään tasapainopisteiden stabiiliuden määritelmä autonomisille systeemeille.
Oletetaan differentiaaliyhtälöryhmän (4.6) funktioiden $f(x,y)$ ja $g(x,y)$ olevan derivoituvia jossain alueessa $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Nyt siis

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases} \tag{4.6}$$

on tarkasteltava autonominen systeemi.

**Määritelmä 4.4.** Määritellään ensin systeemin alkuarvojen

$$x(0) = x^*$$
$$y(0) = y^*$$

etäisyys tarkasteltavasta tasapainopisteestä. Olkoon $\bar{x}(t_0) = (x^*, y^*)$ systeemin (4.6) alkuehto ja $\bar{x}_0 = (x_0, y_0)$ systeemin tasapainopiste. Näiden pisteiden *etäisyys* toisistaan on

$$|\bar{x}_0 - \bar{x}(t_0)| = \sqrt{(x_0 - x^*)^2 + (y_0 - y^*)^2}. \tag{4.7}$$

**Määritelmä 4.5.** Olkoon $(x(t), y(t))$ yksikäsitteinen ratkaisupari systeemille (4.6) siten ,että ratkaisupari toteuttaa alkuarvoehdon

$$x(t_0) = x^* \quad y(t_0) = y^*.$$

Tasapainopiste $(x_0, y_0)$ on

- *stabiili* silloin kun jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että kun

$$\begin{aligned} &|\bar{x}_0 - \bar{x}(t_0)| < \delta \quad \text{niin} \\ &|\bar{x}_0 - \bar{x}(t)| < \epsilon \quad \text{kaikilla } t \geq 0. \end{aligned} \tag{4.8}$$

- *epästabiili*, jos on olemassa ainakin yksi ratkaisu joka ei pysy tasapainopisteen $(x_0.y_0)$ läheisyydessä, kun $t > 0$, eli jos se ei ole stabiili.
- *asymptoottisesti stabiili* silloin kun se on stabiili ja

$$\lim_{t\to\infty} |\bar{x}_0 - \bar{x}(t)| = 0$$

[2, s.383].

## 4.5 Lineaarisen systeemin tasapainopisteiden stabiilius

Lineaarisen differentiaaliyhtälösysteemin ominaisarvojen avulla voidaan selvittää tasapainopisteen stabiilius. Tässä kappaleessa esitetään kuinka ominaisarvot määräävät tasapainopisteen stabiiliuden homogeenisessä lineaarisessa systeemissä

$$\bar{x}' = A\bar{x}. \tag{4.9}$$

Tässä $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ on vakiokertoiminen matriisi jolle pätee, että $\det A \neq 0$ joten origo on systeemin ainoa tasapainopiste. Matriisin $A$ karakteristisella yhtälöllä (3.7) on korkeintaan kaksi toisistaan eroavaa ratkaisua $\lambda_1$ ja $\lambda_2$. Systeemin (4.9) ratkaisuiden radat riippuvat näistä kahdesta ominaisarvosta.

1. Olkoon $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ toisistaan eroavia ja samaa merkkiä olevia ratkaisuja karakteristiseen yhtälöön (3.7). Oletetaan, että $\lambda_1 > \lambda_2$. Ratkaisu on muotoa

   $$(x(t), y(t)) = (c_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\alpha_2 e^{\lambda_2 t}, c_1\beta_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\beta_2 e^{\lambda_2 t}). \tag{4.10}$$

   $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ [2, s.117].

   - Oletetaan, että $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Selvästi ratkaisut (4.10) lähestyvät pistettä $(0,0)$, kun $t \to \infty$. Oletetaan ensin, että $c_1 = 0$ ja $c_2 \neq 0$. Nyt

     $$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{c_2\beta_2 e^{\lambda_2 t}}{c_2\alpha_2 e^{\lambda_2 t}} \quad \text{joten} \quad y(t) = \frac{\beta_2}{\alpha_2}x(t).$$

     Nyt siis ratkaisu on suora jonka kulmakerroin on $\beta_2/\alpha_2$. Vastaavasti kun $c_2 = 0$ ja $c_1 \neq 0$, niin ratkaisu on suora jonka kulmakerroin on $\beta_1/\alpha_1$. Oletetaan nyt, että $c_1 \neq 0$ ja $c_2 \neq 0$. Nyt

     $$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{c_1\beta_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\beta_2 e^{\lambda_2 t}}{c_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\alpha_2 e^{\lambda_2 t}}$$

     Supistetaan murtolukua termillä $e^{\lambda_1 t}$ ja saadaan

     $$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{c_1\beta_1 + c_2\beta_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}}{c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}}.$$

     Nyt

     $$\lim_{t\to\infty} \frac{c_1\beta_1 + c_2\beta_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}}{c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}} = \frac{c_1\beta_1}{c_1\alpha_1} = \frac{\beta_1}{\alpha_1}.$$

     Kaikki ratkaisut lähenevät origoa, kun $t \to \infty$. Asymptoottina suora jonka kulmakerroin on $\beta_1/\alpha_1$ . Vastaavasti, kun $t \to -\infty$ niin kaikki ratkaisut lähestyvät ääretöntä ja ratkaisuiden asymptootti on suora jonka kulmakerroin on $\beta_2/\alpha_2$. Origo on asymptoottisesti stabiili määritelmän 4.5 perusteella[2, s.386].

- Oletetaan, että $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. Kun $t \to \infty$, niin kaikki ratkaisut lähestyvät ääretöntä lukuun ottamatta tasapainopisteratkaisua. Ratkaisuiden asymptootti on suora, jonka kulmakerroin on $\beta_1/\alpha_1$ kun $t \to \infty$. Näin ollen origon on epästabiili määritelmän 4.5 perusteella. [2, s.386].

2. Olkoon $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ ja $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Ratkaisu on muotoa
$$(x(t), y(t)) = (c_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\alpha_2 e^{\lambda_2 t}, c_1\beta_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\beta_2 e^{\lambda_2 t}).$$
Oletetaan nyt, että $c_1 = 0$ ja $c_2 \neq 0$ ja saadaan johdettua ratkaisuista kulmakertoimeksi
$$y(t) = \frac{\beta_2}{\alpha_2} x(t).$$
Nyt kun $t \to \infty$, niin ratkaisut $x(t)$ ja $y(t)$ lähestyvät origoa, koska $\lambda_2 < 0$. Jos $c_1 \neq 0$ ja $c_2 = 0$ niin
$$y(t) = \frac{\beta_1}{\alpha_1} x(t)$$
ja $x(t)$ sekä $y(t)$ lähestyvät ääretöntä, kun $t \to \infty$, koska $\lambda_1 > 0$.
Oletetaan nyt, että $c_1 \neq 0$ ja $c_2 \neq 0$ ja tarkastellaan aikaisemmin johdettua tilannetta
$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{c_1\beta_1 + c_2\beta_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}}{c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}}. \tag{4.11}$$
Tämä lähestyy $\beta_1/\alpha_1$, kun $t \to \infty$ ja kaikkien ratkaisuiden asymptootti on suora $y(t) = (\beta_1/\alpha_1)x(t)$. Myös
$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{c_1\beta_1 e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} + c_2\beta_2}{c_1\alpha_1 e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} + c_2\alpha_2}$$
lähestyy $\beta_2/\alpha_2$, kun $t \to -\infty$ ja suora $y(t) = (\beta_2/\alpha_2)x(t)$ on kaikkien ratkaisuiden asymptootti.
Sekä $x(t)$, että $y(t)$ lähestyvät ääretöntä, kun $t \to \pm\infty$. Yksikäsitteisyyden perusteella yksikään rata ei voi kulkea origon läpi. Origo on siis epästabiili määritelmän 4.5 perusteella. Tasapainopisteellä on sellainen ominaisuus, että tasan yksi ratkaisu lähestyy origoa, ja muut ratkaisut erkanevat siitä [2, s.390].

3. Olkoon $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ja oletetaan ensin, että $\lambda < 0$. On kaksi tilannetta jolloin $\lambda_1 = \lambda_2$. Ensimmäinen on tilanne jossa
$$a_{11} = a_{22} \neq 0, \quad a_{21} = a_{12} = 0. \tag{4.12}$$
Tällöin karakteristinen yhtälö on
$$\lambda^2 - 2a_{11}\lambda + a_{11}^2 = 0 \quad \text{ja } \lambda = a_{11} \text{ on yhtälön ratkaisu.}$$

Ratkaisu on muotoa

$$(x(t), y(t)) = (c_1 e^{\lambda t}, c_2 e^{\lambda t})$$

joten $y(t) = (c_2/c_1)x(t)$. Kaikkien ratkaisuiden radat ovat siis suoria kulmakertoimella $c_2/c_1$. Koska $\lambda < 0$, kaikki ratkaisut lähestyvät nollaa kun $t \to \infty$. Näin ollen määritelmän 4.5 perusteella origo on asymptoottisesti stabiili[2, s389].
Tarkastellaan nyt tilannetta jossa tilanne (4.12) ei toteudu. Tällöin ratkaisu on muotoa

$$(x(t), y(t)) = ([c_1\alpha_1 + c_2(\alpha_2 + \alpha_3 t)]e^{\lambda t}, [c_1\beta_1 + c_2(\beta_2 + \beta_3)]e^{\lambda t})$$

[2, s.119]. Nyt

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + c_2\beta_3 t}{c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_2\alpha_3 t} = \frac{c_1\beta_1/t + c_2\beta_2/t + c_2\beta_3}{c_1\alpha_1/t + c_2\alpha_2/t + c_2\alpha 3}$$

lähestyy $\beta_3/\alpha_3$ kun $t \to \pm\infty$. Koska $x(t)$ ja $y(t)$ molemmat lähestyvät nollaa, kun $t \to \infty$, niin ollen origo on määritelmän 4.5 perusteella origo on asymptoottisesti stabiili. Suora $y(t) = (\beta_3/\beta_3)x(t)$ on kaikkien ratkaisuiden asymptootti.[2, s.390]
Tarkastellaan tilannetta $\lambda > 0$. Nyt aikaisemmin esitetyn ratkaisuiden analyysin perusteella kaikki ratkaisut lähestyvät ääretöntä kun $t \to \infty$. Origo on epästabiili määritelmän 4.5 perusteella.

4. Oletetaan, että $\lambda_1$ ja $\lambda_2$ ovat kompleksikonjugaatteja. Olkoon $\lambda_1 = a + ib$ ja $\lambda_2 = a - ib$ sekä $a \neq 0$ ja $b \neq 0$.

   - Olkoon $a < 0$. Nyt kaikki ratkaisut $(x(t), y(t))$ ovat muotoa [2, s.121]
     (4.13)
     $$\begin{cases} x(t) = e^{at}[c_1(A_1\cos(bt) - A_2\sin(bt)) + c_2(A_1\sin(bt) + A_2\cos(bt)] \\ y(t) = e^{at}[c_1(B_1\cos(bt) - B_2\sin(bt)) + c_2(B_1\sin(bt) + B_2\cos(bt)]. \end{cases}$$

     Yksinkertaistetaan merkintää ja määritellään

     $$\begin{aligned} k_1 &= c_1A_1 + c_2A_2 \quad & k_2 &= -c_1A_2 + c_2A_1 \\ k_3 &= c_1B_1 + c_2B_2 \quad & k_4 &= -c_1B_2 + c_2B_1. \end{aligned}$$

     Ratkaisu (4.13) saadaan muotoon

     $$\begin{cases} x(t) = e^{at}(k_1\cos(bt) + k_2\sin(bt)) \\ y(t) = e^{at}(k_3\cos(bt) + k_4\sin(bt)). \end{cases} \tag{4.14}$$

Määritellään nyt $A = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ ja $B = \sqrt{k_3^2 + k_4^2}$ ja edelleen määritellään, että

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha_1) &= \frac{k_1}{A} & \cos(\alpha_2) &= \frac{k_3}{B} \\
\sin(\alpha_1) &= -\frac{k_2}{A} & \sin(\alpha_2) &= -\frac{k_4}{B}.
\end{aligned}
$$

Joten

$$k_1 = A\cos(\alpha_1), \quad k_2 = -A\sin(\alpha_1), \quad k_3 = B\cos(\alpha_2) \quad \text{ja} \quad k_4 = -B\sin(\alpha_4)$$

ja

$$\begin{cases} x(t) = Ae^{\alpha t}(\cos(\alpha_1)\cos(bt) - \sin(\alpha_1)\sin(bt) \\ y(t) = Be^{\alpha t}(\cos(\alpha_2)\cos(bt) - \sin(\alpha_2)\sin(bt). \end{cases}$$

Koska

$$\cos(d \pm c) = \cos(d)\cos(c) \pm \sin(d)\sin(c),$$

niin voidaan sieventää $(x(t), y(t))$ edelleen muotoon

$$(x(t), y(t)) = (Ae^{at}\cos(bt + \alpha_1), Be^{at}\cos(bt + \alpha_2)).$$

Joten

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{B\cos(bt + \alpha_1)}{A\cos(bt + \alpha_2)}$$

silloin, kun $\cos(bt + \alpha_2) \neq 0$. Suhde $y(t)/x(t)$ ei lähesty raja-arvoa kun $t \to \infty$. Koska $a < 0$, niin $x(t)$ ja $y(t)$ lähestyy nollaa kun $t \to \infty$. Tällöin origo on asymptoottisesti stabiili määritelmän 4.5 perusteella.

- Oletetaan, että $a > 0$. Saman analyysin perusteella kuin edellisessä kohdassa mutta nyt $a > 0$ perusteella kaikki ratkaisut lähestyvät ääretöntä, kun $t \to \infty$ ja origo on epästabiili määritelmän 4.5 perusteella [2, s.398].

5. Tarkstellaan vielä tilannetta $\lambda_1 = ib$ ja $\lambda_2 = -ib$. Edellisen analyysin perusteella ratkaisu voidaan kirjoittaa vastaavassa muodossa

$$(x(t), y(t)) = (A\cos(bt + \alpha_1), B\cos(bt + \alpha_2)).$$

Huomataan, että radat ovat jaksollisia. Ratkaisun lähtiessä pisteestä $(x_0, y_0)$ kun $t = t_0$, palaa se samaan pisteeseen, kun $t = t_0 + 2\pi/b$. Asetetaan yhtälössä (4.14) $k_2 = k_3 = 0$. Saadaan

$$\begin{cases} x(t) = k_1\cos(bt) \\ y(t) = k_4\sin(bt) \end{cases}$$

joten

$$\frac{(x(t))^2}{k_1^2} + \frac{(y(t))^2}{k_4^2} = \cos^2(bt) + \sin^2(bt) = 1.$$

Tämä on origon ympärillä olevan ellipsin yhtälö. Jos $k_2 \neq 0$ ja $k_4 \neq 0$, niin saadaan sellaisten ellipsien yhtälöitä joilla on kiertynyt symmetria-akseli. Nyt origo on stabiili määritelmän 4.5 perusteella, koska ratkaisut eivät lähesty origoa mutta eivät myöskään lähesty ääretöntä kun $t \to \infty$.

**Lause 4.1.** *Olkoon $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ matriisin $A$ karakteristisen yhtälön* (3.6) *ratkaisuja. Tällöin*

*(a) origo on stabiili jos $\lambda_1$ ja $\lambda_2$ ovat puhtaasti imaginäärisiä*

*(b) origo on asymptoottisesti stabiili jos* $\operatorname{Re}\lambda_1 < 0$ *ja* $\operatorname{Re}\lambda_2 < 0$

*(c) muissa tapauksissa origo on epästabiili [2, 394].*

**Määritelmä 4.6.** Vakiokertoimisen matriisin $A \in \mathbb{R}^2$ tasapainopisteet voi luokitella vielä tarkemmin.

| Ominaisarvot $\lambda_1$ ja $\lambda_2$ | Tasapainopisteen laatu |
|---|---|
| Reaalisia ja negatiivisia | Asymptoottisesti stabiili *solmu* |
| Reaalisia ja positiivisia | Epästabiili *solmu* |
| Reaalisia ja eri merkkisiä | Epästabiili *satulapiste* |
| Kompleksikonjugaatteja joilla negatiivinen reaaliosa | Asymptoottisesti stabiili *nielu* |
| Kompleksikonjugaatteja joilla positiivinen reaaliosa | Epästabiili *lähde* |
| Kompleksikonjugaatteja jotka ovat puhtaasti imaginääriset | Stabiili *keskus* |

[2, s.394]

Tarkastellaan nyt lineaarisen systeemin origon stabiiliutta esimerkein.

**Esimerkki 4.4.** Tarkastellaan systeemiä

$$\begin{cases} x' = 4x + 3y \\ y' = 5x - 4y. \end{cases}$$

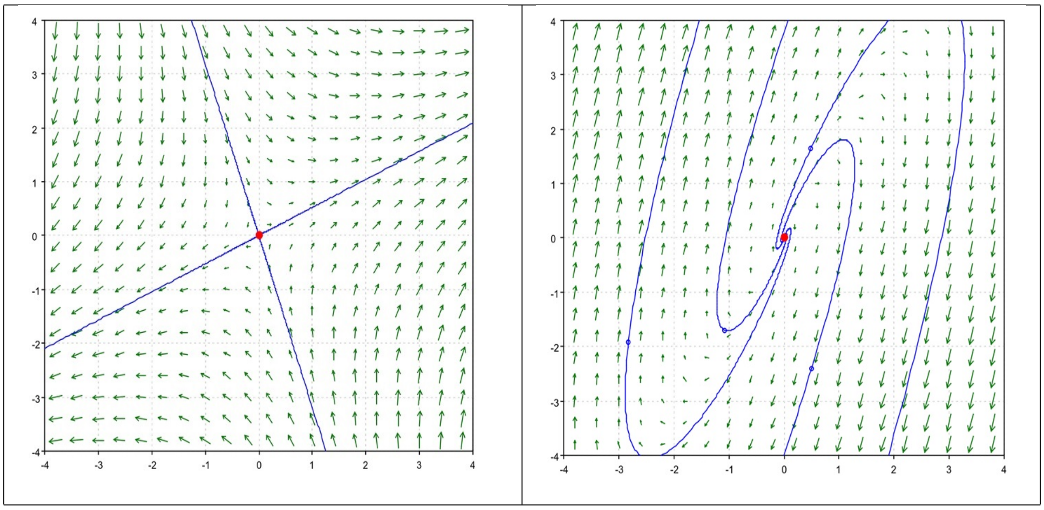
Esitetään ensin tämä systeemi

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \bar{x}$$

matriisimuodossa. Lasketaan vakiomatriisin ominaisarvot karakteristisesta yhtälöstä (3.6)

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (4-4)\lambda + 4 \cdot (-4) - 3 \cdot 5 = 0.$$

Ominaisarvoiksi saadaan $\lambda_1 = -\sqrt{31}$ ja $\lambda_2 = \sqrt{31}$. Nyt lauseen 4.1 kohdan $(c)$ perusteella origo on epästabiili tarkastellussa systeemissä. Määritelmän 4.6 perusteella tasapainopiste on satulapiste.



Kuva 1: Vasemmalla on esimerkin 4.4 systeemin vektorikenttäkuva ja oikealla on esimerkin 4.5 systeemin vektorikenttäkuva.

**Esimerkki 4.5.** Tarkastellaan nyt systeemiä

$$\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -5x + 3y. \end{cases}$$

Esitetään tämä systeemi vektorimuodossa

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \bar{x}.$$

Lasketaan vakiomatriisin ominaisarvot käyttäen yhtälöä (3.6) ja saadaan yhtälö

$$\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0.$$

Tästä yhtälöstä saadaan ominaisarvoiksi $1-i$ ja $1+i$. Lauseen 4.1 kohdan $(c)$ perusteella origo epästabiili. Määritelmän 4.6 perusteella kyseessä on lähde.

**Esimerkki 4.6.** Tarkastellaan systeemiä

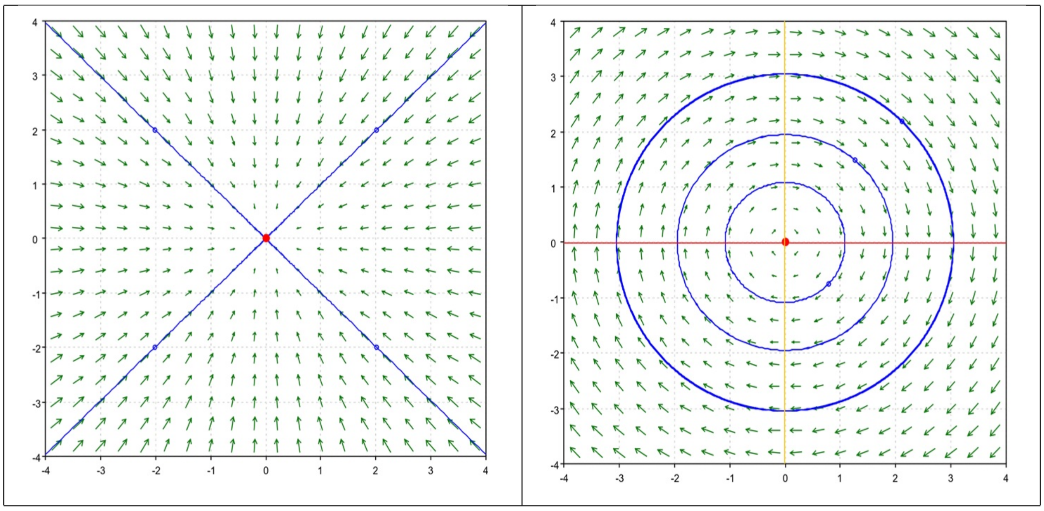
$$\begin{cases} x' = -2x \\ y' = -2y. \end{cases}$$

Esitetään ensin tämä systeemi muodossa (4.9)

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \bar{x}.$$

Lasketaan nyt vakiomatriisin ominaisarvoiksi yhtälöstä (3.6) $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$. Lauseen 4.1 kohdan $(b)$ perusteella origo on asymptoottisesti stabiili. Määritelmän 4.6 perusteella kyseessä on asymptoottisesti stabiili solmu.

**Huomautus 4.4.** Tämän systeemin solmua kutsutaan tähden muotoiseksi solmuksi. Tämä näkyy kuvasta 4.6.



Kuva 2: Vasemmalla on esimerkin 4.6 systeemin vektorikenttäkuva ja oikealla on esimerkin 4.7 systeemin vektorikenttäkuva.

**Esimerkki 4.7.** Otetaan nyt systeemi

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$$

tarkasteluun. Esitetään ensin tämä systeemi muodossa (4.9)

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \bar{x}.$$

Lasketaan nyt vakiomatriisin ominaisarvoiksi $\lambda_1 = i$ ja $\lambda_2 = -i$. Lauseen 4.1 kohdan $(a)$ perusteella origo on stabiili. Määritelmän 4.6 perusteella kyseessä on stabiili keskus.

## 4.6 Matriisin jälki, determinantti ja lineaarisen systeemin stabiilisuus

Tässä kappaleessa tarkastellaan matrisiin $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ominaisarvojen yhteyttä matriisin determinanttiin ja jälkeen. Matriisin stabiiliuden voi määritellä laskemalla matriisin determinantin ja jäljen.

**Lause 4.2.** *Olkoon $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ja*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

*Tällöin matriisin ominaisarvojen avulla voidaan lausua matriisin jälki ja determinantti siten, että*

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(A) &= \lambda_1 + \lambda_2 \\ \det(A) &= \lambda_1\lambda_2. \end{aligned} \tag{4.15}$$

*Todistus.* Matriisin $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ karakteristinen yhtälö on muotoa

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.$$

Nyt determinantin määritelmän perusteella $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ja jäljen määritelmän perusteella $\operatorname{Tr}(A) = a_{11} + a_{22}$. Esitetään karakteristinen yhtälö muodossa

$$\lambda^2 - \operatorname{Tr}(A)\lambda + \det(A) = 0.$$

Tällä yhtälöllä on enintään kaksi ratkaisua ja ne ovat muotoa

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2}[\operatorname{Tr}(A) + \sqrt{(\operatorname{Tr}(A))^2 - 4\det(A)}] \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}[\operatorname{Tr}(A) - \sqrt{(\operatorname{Tr}(A))^2 - 4\det(A)}]. \end{aligned}$$

Ratkaistaan ensimmäisestä yhtälöstä $(2\lambda_1 - (\operatorname{Tr}(A))^2 - (\operatorname{Tr}(A))^2 = -4\det(A)$. Sijoitetaan tämä toiseen yhtälöön ja saadaan ratkaisua matriisin jäljeksi

$$\operatorname{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Sijoitetaan vielä $\operatorname{Tr}(A)$ ensimmäiseen yhtälöön ja saadaan, että

$$\det(A) = \lambda_1\lambda_2.$$

□

Tarkastellaan tarkemmin yhtälöä josta saadaan ratkaistua matriisin $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ominaisarvot. Ratkaisut ovat muotoa

$$\lambda_i = \frac{-(-\operatorname{Tr}(A)) \pm \sqrt{(\operatorname{Tr}(A))^2 - 4\det(A)}}{2}. \tag{4.16}$$

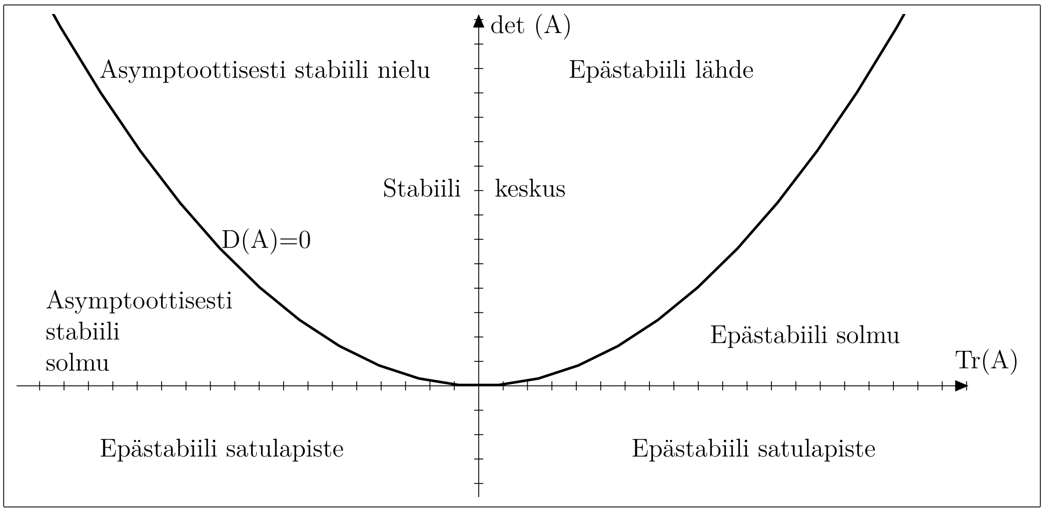
Matriisin $A$ diskriminantti $D(A) = (\operatorname{Tr}(A))^2 - 4\det(A)$. Diskriminantin arvo määrittää sen, että ovatko ominaisarvot kompleksilukuja, reaalisia vai onko matriisilla $A$ vain yksi ominaisarvo.

- Oletetaan, että diskriminantti on negatiivinen. Tällöin $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ ja $\lambda_2 \in \mathbb{C}$. Riippuen jäljen merkistä kyseessä on joko nielu tai lähde. Joko molempien ominaisarvojen reaaliosat ovat positiivisia tai molemmat reaaliosat negatiivisia.

- Jos diskriminantti on nolla tai positiivinen sekä, jos $\det(A) > 0$, niin kyse on solmusta.

- Jos $\det(A) < 0$, niin kyseessä on satulapiste. Lauseen 4.2 perusteella täytyy $\lambda_1\lambda_2 < 0$. Tämä toteutuu vain silloin, kun toinen ominaisarvoista on negatiivinen ja toinen positiivinen.

Esitetään diskriminantin kuvaaja. Kuvaaja tulkitsemalla voidaan päätellä systeemin tasapainopisteen laatu ratkaisematta ominaisarvoja. Tasapainopisteen luonteen tarkastelemiseksi siis riittää vain matriisin determinantin ja jäljen laskeminen.
Kun determinantti on negatiivinen, niin kyseessä on epästabiili satulapiste. Vastaavasti determinantin olleessa positiivinen riippuu pisteen stabiilius jäljen merkistä. Jos jälki on negatiivinen, niin piste on epästabiili. Jos jälki on positiivinen, niin silloin on kyseessä asymptoottisesti stabiili tasapainopiste. Jos jälki on nolla ja determinantti on suurempi kuin nolla, niin kyseessä on stabiili tasapainopiste[3, s.574-578].
Esitetään kuvaaja $D(A) = (\mathrm{Tr}(A))^2 - 4\det(A) = 0$ jälki-determinantti tasossa.




Kuva 3: Kuvaaja $D(A) = (\mathrm{Tr}(A))^2 - 4\det(A) = 0$ jälki-determinantti tasossa.

# 5 Linearisoitu systeemi

Joidenkin epälineaaristen systeemien tasapainopisteiden tyyppi voidaan määrittää käyttämällä menetelmää, jota kutsutaan linearisoinniksi. Tässä kappaleessa tarkastellaan autonomisten ja epälineaaristen differentiaaliyhtälösysteemeiden

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases} \tag{5.1}$$

käyttäytymistä lähellä tasapainopistettä $(x_0, y_0)$. Oletetaan, että funktiot $f$ ja $g$ ovat jatkuvasti derivoituvia tasapainopisteen $(x_0, y_0)$ ympäristössä.
Jos tasapainopiste ei ole $x_0 = y_0 = 0$, niin voidaan tehdä sijoitus $u(t) = x(t) - x_0$ ja $v(t) = y(t) - y_0$. Joten $u'(t) = x'(t)$ ja $v'(t) = y'(t)$, koska $x_0$ ja $y_0$ ovat vakioita. Systeemiä (5.1) vastaava systeemi on

$$\begin{cases} u' = f(u + x_0, v + y_0) = f_1(u,v) \\ v' = g(u + x_0, v + y_0) = g_1(u,v) \end{cases}$$

Tällä systeemillä on tasapainopiste origossa [1, s.378].

**Esimerkki 5.1.** Tarkastellaan nyt systeemiä

$$\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = 3x - 4y - 2. \end{cases} \tag{5.2}$$

Tällä systeemillä on tasapainopiste pisteessä $(2, 1)$. Asetetaan nyt $u = x - 2$ ja $v = y - 1$ ja sijoitetaan arvot takaisin systeemiin. Nyt siis $x = u + 2$ ja $y = u + 1$ ja ollaan tilanteessa jossa

$$\begin{cases} u' = (u + 2) - 2(v + 1) \\ v' = 3(u + 2) - 4(v + 1) - 2. \end{cases}$$

Systeemiä, jolla on origossa vastaava tasapainopiste kuin systeemillä (5.2) on muotoa

$$\begin{cases} u' = u - 2v \\ v' = 3u - 4v. \end{cases}$$

## 5.1 Linearisointi

Funktiot $f(x,y)$ ja $g(x,y)$ voidaan laajentaa Taylorin sarjalla [2, s.397].
Esitetään nyt funktioiden $f(x,y)$ ja $g(x,y)$ Taylorin sarja pisteessä $(x_0, y_0)$.
Oletetaan, että funktiot $f(x,y)$ ja $g(x,y)$ ovat kolme kertaa jatkuvasti derivoituvia pisteen $(x_0, y_0)$ ympäristössä. Joten
(5.3)

$$\begin{cases} f(x,y) = f(x_0,y_0) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0) + P(x,y) \\ g(x,y) = g(x_0,y_0) + \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0) + Q(x,y). \end{cases}$$

Tässä $P(x,y)$ ja $Q(x,y)$ ovat jäännöstermejä joissa on kaikki yhtä isompaa osittaisderivaatan kertalukua olevat termit ja täyttävät ehdon

$$\lim_{x,y\to 0}\frac{P(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{x,y\to 0}\frac{Q(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0. \tag{5.4}$$

Ehto(5.4) tarkoittaa sitä, että piste $(P(x,y),Q(x,y))$ lähestyy pistettä $(0,0)$ nopeammin kuin piste $(x,y)$ [2, s.397].

**Huomautus 5.1.** Ehto (5.4) ei toteudu, kun jäännöstermit $P(x,y)$ tai $Q(x,y)$ ovat summia jotka koostuvat vakiotermeistä tai muuttujien $x$ tai $y$ kanssa lineaarisista termeistä [1, s.379].

Sijoitetaan nyt Taylorin sarjalla pisteessä $(x_0,y_0)$ laajennetut funktiot systeemiin (5.1)

$$\begin{cases} x'=f(x_0,y_0)+\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+P(x,y) \\ y'=g(x_0,y_0)+\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+Q(x,y). \end{cases} \tag{5.5}$$

Tarkastellaan ensin tilannetta jossa tasapainopiste on systeemin (5.1) origossa. Joten $x_0=y_0=0$ ja piste jossa tehdään Taylorin sarja on tasapainopiste, joten siis $f(0,0)=g(0,0)=0$. Systeemi (5.5) on

$$\begin{cases} x'=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)x+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)y+P(x,y) \\ y'=\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)x+\dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)y+Q(x,y). \end{cases} \tag{5.6}$$

**Määritelmä 5.1.** Asetetaan nyt

$$a_{11}=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\quad a_{12}=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0),\quad a_{21}=\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0),\quad a_{22}=\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) \tag{5.7}$$

ja oletetaan, että

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\neq 0. \tag{5.8}$$

Nyt voidaan kirjoittaa systeemin (5.1) approksimaatio tasapainopisteessä $(0,0)$ siten, että

$$\begin{cases} x'=a_{11}x+a_{12}y+P(x,y) \\ y'=a_{21}x+a_{22}y+Q(x,y). \end{cases} \tag{5.9}$$

Systeemiin (5.1) *yhdistetty lineaarinen systeemi* tasapainopisteessä on tällöin muotoa

$$\begin{cases} x'=a_{11}x+a_{12}y \\ y'=a_{21}x+a_{22}y. \end{cases} \tag{5.10}$$

Tällä systeemillä on tasapainopiste origossa. Tätä sanotaan systeemin (5.1) *linearisoinniksi* tasapainopisteessä $(0,0)$ [2, s.398] [1, s.380].

**Määritelmä 5.2.** Tarkastellaan nyt tilannetta jossa systeemin (5.1) tasapainopiste ei ole origossa. Asetetaan

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt} \quad \text{ja} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dt} \quad \text{kun} \quad u = x - x_0 \quad \text{ja} \quad v = y - y_0.$$

Kirjoitetaan yhtälö (5.5) siten, että

$$\begin{cases} u' = f(x_0,y_0) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)u + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)v + P(u,v) \\ v' = g(x_0,y_0) + \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)u + \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)v + Q(u,v). \end{cases} \tag{5.11}$$

Käytetään nyt määritelmää 5.1 ja johdetaan systeemiin (5.1) *yhdistetty lineaarinen systeemi* missä tahansa tasapainopisteessä $(x_0, y_0)$ muotoon

$$\begin{cases} u' = a_{11}u + a_{12}v \\ v' = a_{21}u + a_{22}v \end{cases} \tag{5.12}$$

Tällä systeemillä on tasapainopiste origossa. Tätä sanotaan systeemin (5.1) *linearisoinniksi* tasapainopisteessä $(x_0, y_0)$ [2, s.398] [1, s.380].

**Määritelmä 5.3.** Määritellään nyt, neliömatriisi $J \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ siten että

$$J(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}. \tag{5.13}$$

Matriisi $J(x_0, y_0)$ on vektorifunktion $F = (f(x,y), g(x,y))$ *Jacobin matriisi* pisteessä $(x_0, y_0)$ [1, s.380].

**Huomautus 5.2.** Systeemin (5.12) voi kirjoittaa Jacobin matriisin avulla

$$\bar{x}' = J(x_0,y_0)\bar{x}. \tag{5.14}$$

Tässä $(x_0, y_0)$ on systeemin eräs (5.1) tasapainopiste [1, s.380].

## 5.2 Linearisoidun systeemin tasapainopisteiden stabiilius

Esitetään lause, jonka avulla voidaan selvittää systeemin (5.9) ainoan eristetyn tasapainopisteen $(0,0)$ laatu tarkastelemalla systeemin (5.10) ratkaisuiden käyttäytymistä lähellä tätä pistettä.

**Lause 5.1.** *Olkoon* $\lambda_1$ *ja* $\lambda_2$ *lineaarisen systeemin* (5.10) *karakteristisen yhtälön ratkaisuja. Epälineaarisella systeemillä* (5.9) *on saman laatuinen tasapainopiste origossa, lukuunottamatta huomautusta, kuin lineaarisella systeemillä* (5.10)*, kun*

*(a)* $\lambda_1 \neq \lambda_2$ *ja origo on systeemin* (5.10) *solmu, niin silloin origo on systeemin* (5.9) *solmu*

*(b)* $\lambda_1 = \lambda_2$ *ja origo ei ole systeemin* (5.10) *tähden muotoinen solmu*

*(c) origo on systeemin* (5.10) *satulapiste niin silloin origo on systeemin* (5.9) *satulapiste*

*(d) origo on systeemin* (5.10) *nielu tai lähde, niin silloin origo on systeemin* (5.9) *nielu tai lähde [2, s.399].*

**Huomautus 5.3.**

Systeemin (5.9) stabiilius tasapainopiste origossa ei ole välttämättä sama kuin linearisoidun systeemin (5.10) stabiilius origossa silloin, kun $\lambda_1 = i\beta$ ja $\lambda_2 = -i\beta$ . Lisäksi, jos $\lambda_1 = \lambda_2$ ja systeemin (5.10) origo on tähden muotoinen solmu, niin silloin origo voi olla systeemin(5.9) solmu, lähde tai nielu säilyttäen kuitenkin stabiiliuden laadun [2, s.399].

Seuraava lause yhdistää epälineaarisen systeemin tasapainopisteen stabiiliuden siihen yhdistetyn lineaarisen systeemin origon stabiilisuuteen.

**Lause 5.2.**

- *Jos origo on asymptoottisesti stabiili systeemissä* (5.12)*, niin silloin systeemin* (5.11) *tasapainopiste on asymptoottisesti stabiili.*
- *Jos origo on epästabiili systeemissä* (5.12)*, niin silloin systeemin* (5.11) *tasapainopiste on epästabiili.*
- *Jos origo on stabiili systeemissä* (5.12)*, niin silloin systeemin* (5.11) *tasapainopiste voi olla asymptoottisesti stabiili, stabiili tai epästabiili [2, s.399].*

## 5.3 Esimerkkejä epälineaaristen autonomisten systeemien tasapainopisteiden stabiiliuden tarkastelusta

Aletaan nyt tarkastelemaan epälineaaristen autonomisten systeemeiden

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases} \tag{5.15}$$

tasapainopisteiden stabiiliutta esimerkein. Nyt tarkasteltavien systeemeiden (5.15) oletetaan toteuttavan ehdot (5.4) ja (5.8).

**Määritelmä 5.4.** Määritellään nollaisokliinit systeemille

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y) \\ y' = f_2(x, y). \end{cases}$$

Nollaisokliini on joukko pisteitä jotka määritellään astettamalla $f_j(x, y) = 0$ [4, s. 189].

**Esimerkki 5.2.** Tarkastellaan nollaisokliinejä vielä esimerkin avulla. Olkoon tarkasteltava systeemi

$$\begin{cases} x' = 2y - x^2 \\ y' = x - 1. \end{cases}$$

Nyt $x$-nollaisokliini on paraabeli $y = -\frac{x^2}{2}$ ja $y$-nollaisokliini on pystysuora suora $x = 1$.

Seuraavaksi tarkasteltavien esimerkkisysteemien kuviin on piirreetty myös nollaisokliinit.

**Esimerkki 5.3.** Aloitetaan tarkastelemalla epälineaarista systeemiä

$$\begin{cases} x' = x + x^3 = f(x, y) \\ y' = y + y^3 = g(x, y) \end{cases} \tag{5.16}$$

Etsitään ensin tarkasteltavan systeemin tasapainopisteet

$$\begin{cases} x + x^3 = 0 \\ y + y^3 = 0 \end{cases} \tag{5.17}$$

Edellinen voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{cases} x(1 + x^2) = 0 \\ y(1 + y^2) = 0. \end{cases}$$

Joten yksi tasapainopiste on piste $(0, 0)$. Nyt siis muut tasapainopisteet toteuttavat yhtälön

$$\begin{cases} 1 + x^2 = 0 \\ 1 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Tästä huomataan, että

$$\begin{cases} x^2 = -1 \\ y^2 = -1 \end{cases}$$

joten muut ratkaisut yhtälöön(5.17) eivät ole kuulu reaalilukujen joukkoon ja eivät ole systeemin (5.16) tasapainopisteitä.

Muodostetaan nyt systeemiin (5.16) yhdistetty lineaarinen systeemi (5.10). Ensin kohdasta (5.7) saadaan vakiot

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = 0, \quad a_{21} = 0, \quad a_{22} = 1$$

ja nyt systeemiin (5.16) yhdistetty lineaarinen systeemi pisteessä $(0, 0)$ on

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y. \end{cases}$$

Muodostetaan nyt Jacobin matriisi

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lasketaan nyt tämän matriisin ominaisarvot karakteristisesta yhtälöstä (3.6)

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.$$

Systeemin ominaisarvot ovat $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Nyt siis lauseen 4.1 kohdan $(c)$ perusteella systeemiin (5.16) yhdistetyn lineaarisen systeemin tasapainopiste $(0, 0)$ on epästabiili solmu. Lauseen 5.2 kohdan kaksi perusteella tarkastellun systeemin (5.16) tasapainopiste $(0, 0)$ on epästabiili.

**Esimerkki 5.4.** Tarkastellaan nyt systeemiä

$$\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = x^2 - y. \end{cases} \tag{5.18}$$

Aloitetaan systeemin tutkiminen selvittämällä sen tasapainopisteet asettamalla

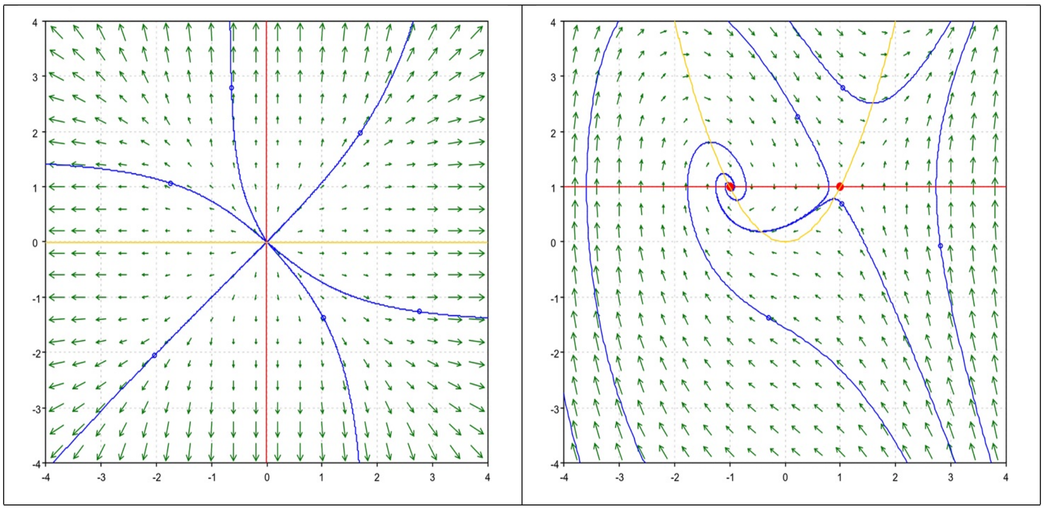
$$\begin{cases} y - 1 = 0 \\ x^2 - y = 0. \end{cases}$$

Tästä saadaan ratkaistua systeemin tasapainopisteiksi $(-1, 1)$ ja $(1, 1)$. Merkitään nyt

$$\begin{cases} x' = y - 1 = f(x, y) \\ y' = x^2 - y = g(x, y). \end{cases}$$

Muodostetaan nyt systeemi (5.10). Ensin kohdasta (5.7)saadaan

$$a_{11} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad a_{12} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \quad a_{21} = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \text{ ja } \quad a_{22} = \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0).$$



Kuva 4: Vasemmalla on esimerkin 5.3 systeemin vektorikenttäkuva johon on merkitty muutaman ratkaisun rata. Oikealla on esimerkin 5.4 systeemin vektorikenttäkuva. Kuvaan on merkitty tasapainopisteet sekä muutaman ratkaisun rata. Molempiin kuviin on piirretty nollaisokliinit.

Suoritetaan osittaisderivionti ja saadaan Jacobin matriisiksi

$$J(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2x_0 & -1 \end{pmatrix}$$

tasapainopisteessä $(x_0, y_0)$.
Tarkastellaan nyt taspainopisteiden $(-1, 1)$ ja $(1, 1)$ Jacobin matriiseja.
Muodostetaan Jacobin matriisi ensin pisteelle $(-1, 1)$

$$J(-1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tarkasteltavan systeemiin yhdistetty lineaarinen systeemi pisteessä $(-1, 1)$ on

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -2u - v. \end{cases} \tag{5.19}$$

Määritellään origon tyyppi laskemalla systeemin ominaisarvot karakteristisesta yhtälöstä (3.6)

$$\lambda^2 + \lambda + 2 = 0.$$

Ominaisarvoiksi saadaan

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} - \sqrt{7} \quad \text{ja} \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{7}i.$$

Nyt lauseen 4.1 kohdan ($b$) perusteella systeemin (5.19) origo on asymptoottisesti stabiili. Lisäksi määritelmän 4.6 perusteella kyseessä on nielu. Nyt lauseen 5.2 kohdan yksi perusteella tarkasteltun systeemin tasapainopiste $(-1, 1)$ on asymptoottisesti stabiili.
Siirrytään nyt tarkastelemaan tasapainopistettä $(1, 1)$ ja muodostetaan Jacobin matriisi pisteelle

$$J(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Systeemiin (5.18) yhdistetty lineaarinen systeemi pisteessä $(1, 1)$ on

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = 2u - v. \end{cases} \tag{5.20}$$

Määritellään nyt systeemin (5.20) origon laatu laskemalla systeemin ominaisarvot karakteristisesta yhtälöstä (3.6)

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

Ominaisarvoiksi saadaan

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{ja} \quad \lambda_2 = -2.$$

Lauseen 4.1 kohda ($c$) perusteella systeemin (5.20) origo on epästabiili. Määritelmän 4.6 perusteella kyseessä on satulapiste. Lauseen 5.2 kohdan kaksi perusteella yhtälön (5.18) tasapainopiste $(1, 1)$ on epästabiili.

**Esimerkki 5.5.** Tarkastellaan kahta kilpailevaa lajia kuvaavaa differentiaaliyhtälösysteemiä. Oletetaan, että $x$ ja $y$ ovat kilpailevia organismeja. Lasketaan näitä organismien määriä satoina. Tämä on erityistapaus Lotka-Volterra yhtälöistä [2, s.399-400]. Ratkaistaan ensin systeemin

$$\begin{cases} x' = -x - 2x^2 + xy \\ y' = -y + 7xy - 2y^2 \end{cases} \tag{5.21}$$

tasapainopisteet. Asetetaan

$$\begin{cases} -x - 2x^2 + xy = 0 \\ -y + 7xy - 2y^2 = 0. \end{cases}$$

Tasapainopisteet ovat $(0, 0)$, $(-0.5, 0)$, $(0, -0.5)$ ja $(1, 3)$. Tasapainopisteiden ollessa negatiivisen $x$ tai $y$ akselin puolella niin niillä ei ole mitään käytännön merkitystä, koska negatiivisia populaatioita ei huomioida.
Muodostetaan systeemi (5.10). Suoritetaan osittaisderivointi ja saadaan Jacobin matriisiksi

$$J(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} -4x_0 + y_0 - 1 & x_0 \\ 7y_0 & 7x_0 - 4y_0 - 1 \end{pmatrix}.$$

Systeemin (5.21) yhdistetty lineaarinen systeemi pisteessä $(0,0)$ on

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y. \end{cases} \tag{5.22}$$

Lasketaan systeemin ominaisarvot karakteristisesta yhtälöstä (3.6)

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

Ominaisarvoiksi saadaan $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Lauseen 4.1 kohdan $(b)$ perusteella systeemin (5.22) origo on asymptoottisesti stabiili. Määritelmän 4.6 perusteella origo on solmu. Lauseen 5.2 kohdan yksi perusteella yhtälön (5.21) tasapainopiste $(0,0)$ on asymptoottisesti stabiili.
Systeemiin (5.21) yhdistetty lineaarinen systeemi pisteessä $(1,3)$ on

$$\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = 21x - 6y. \end{cases} \tag{5.23}$$

Lasketaan ominaisarvoiksi $\lambda_1 = -9$ ja $\lambda_2 = 1$ Lauseen 4.1 kohdan $(c)$ perusteella systeemin (5.23) origo on epästabiili. Määritelmän 4.6 perusteella origo on satulapiste. Lauseen 5.2 kohdan kaksi perusteella yhtälön (5.21) tasapainopiste $(1,3)$ on epästabiili.
Tasapainopisteiden analysoinnista voidaan päätellä, että kun organismien populaatiot ovat riittävän isot, niin voi olla, että ne selviytyvät. Esitetään vielä tilanteen vektorikenttä kuva, johon on piirretty muutama ratkaisurata.

**Esimerkki 5.6.** Tarkastellaan Van der Pol yhtälöä

$$x'' + \epsilon(x^2 - 1)x' + x = 0. \tag{5.24}$$

Muutetaan ensin toisen asteen differentiaaliyhtälö ensimmäisen asteen systeemiksi

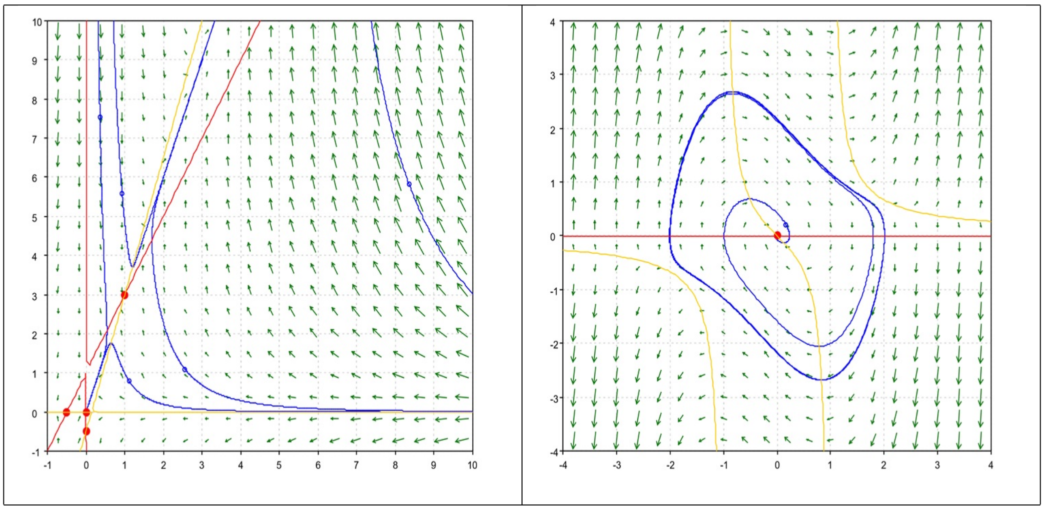
$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -\epsilon(y_1^2 - 1)y_2 - y_1. \end{cases} \tag{5.25}$$

Tällä systeemillä on yksi tasapainopiste $(0,0)$. Muodostetaan systeemi (5.10). Systeemin (5.25) Jacobin matriisi on

$$J(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\epsilon xy + 1 & -\epsilon x^2 + \epsilon \end{pmatrix}.$$

Systeemiin (5.25) yhdistetty lineaarinen systeemi tasapainopisteessä $(0,0)$ on

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x + \epsilon y \end{cases}$$



Kuva 5: Vasemmalla on esimerkin 5.5 systeemin vektorikenttäkuva. Kuvaan on merkitty taspainopisteet sekä muutaman ratkaisun rata. Oikealla on esimerkin 5.6 vektorikenttäkuva johon on piirretty yksi ratkaisurata, joka on tasapainopisteen läheisyydessä, kun $\epsilon < 0$. Molempiin kuviin on piirretty nollaisokliinit.

ja matriisimuoto on

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \epsilon \end{pmatrix}.$$

Analysoidaan matriisia käyttäen kappaleen 4.16 menetelmää. Diskriminantti on

$$D(A) = (\mathrm{Tr}(A))^2 - 4\det(A)$$

Matriisin $A$ $\mathrm{Tr}(A) = \epsilon$ ja $\det(A) = 1$. Nyt kappaleen 4.16 perusteella voidaan päätellä, että jos $\epsilon < 0$, niin kysessä on asymptoottisesti stabiili tasapainopiste ja lauseen 5.2 perusteella systeemin (5.25) tasapainopiste $(0, 0)$ on asymptoottisesti stabiili. Vastaavasti jos $\epsilon > 0$, niin kysessä on epästabiili tasapainopiste joka on lasueen 5.2 perusteella epästabiili tasapainopiste.

# Viitteet

[1] C. Henry Edwards, David E. Penney *Differential equations and boundary value problems*, Third edition. Pearson education, Inc 2004.

[2] William R. Derrick, Stanley I. Grossman *Elementary differential equations with applications*, Second edition. Addison-Wesley publishing company inc 1982.

[3] Alan Jeffrey *Linear algebra and ordinary differential equations.*Blakwell scientific publications 1990.

[4] *Differential equations, dynamical systems and an introduction to chaos* Morris W. Hirsch, Stephen Smale, Robert L. Devaney

[5] William R. Derrick, Stanley I. Grossman *Elementary differential equations*, Fourth edition. Addison-Wesley educational publishers inc 1997.